Exercice 01 – Mesure de l'épaisseur d'un film alimentaire

1. Mesure de l'épaisseur d'un film alimentaire par capacimétrie.

Q1. Loi des mailles : $E = u_R + u_C$
Loi d'Ohm : $u_R = R \times i$

Relation intensité-tension : $i = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d(C \cdot u_C)}{dt} = C \cdot \dfrac{du_C}{dt}$

car C est une constante.
On reporte l'expression de $u_R = R \times i$ dans la loi des mailles :
$E = R \times i + u_C$

$E = RC \cdot \dfrac{du_C}{dt} + u_C$

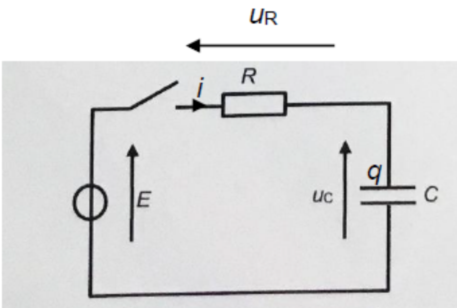


Figure 2. Schéma du montage électrique

En divisant chaque membre par RC : $\boxed{\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{E}{RC}}$.

Par identification avec l'expression de l'énoncé : $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$ on a $\boxed{\tau = RC}$.

Q2. On reporte la solution $u_C(t) = A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ dans l'équation différentielle avec $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Soit : $\dfrac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{\tau} = \dfrac{E}{\tau} \Leftrightarrow \cancel{\dfrac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}} + \dfrac{A}{\tau} - \cancel{\dfrac{A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}} = \dfrac{E}{\tau}$

$\dfrac{A}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$ soit $\boxed{A = E}$ et finalement : $\boxed{u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$.

Plus rapide : Pour $t \to \infty$, le condensateur est chargé alors $u_C = E$.

$A \cdot \left(1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = E$

$A \cdot (1 - 0) = E$ donc $A = E$.

Q3. $u_C(\tau) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = E \cdot \left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}63 \times E$.

```
1-e^-1
                0.6321205588
Rep*4.9
                3.097390738
```

Q4. On a E = 4,9 V donc $u_C(\tau) = 0{,}63 \times 4{,}9$ V = **3,1 V**.
On trace une droite horizontale d'ordonnée 3,1 V qui coupe la courbe en un point d'abscisse égale à τ.

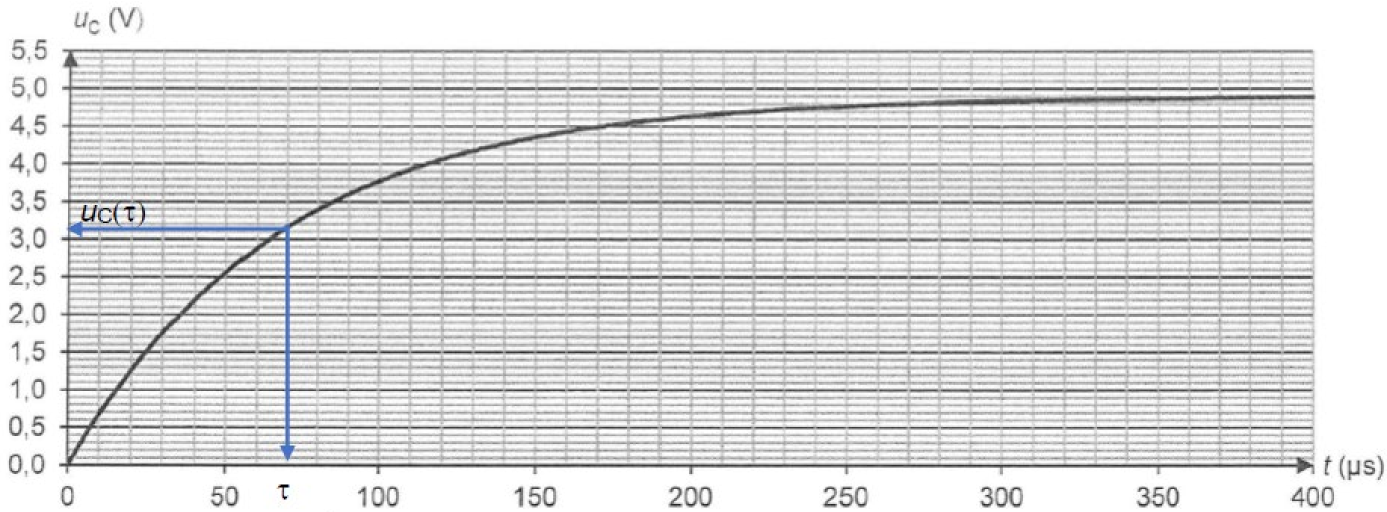


Figure 3. Évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps

Graphiquement, pour u_C = 3,1 V, on lit : **τ = 70 µs**.

Q5. $\tau = R{\cdot}C$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$

soit $C = \dfrac{70\times10^{-6}\,s}{1{,}00\times10^{3}\,\Omega}$ **= 7,0×10⁻⁸ F = 70 nF**.

Q6. $C = \dfrac{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r,film}\cdot S}{e_{film}}$ donc $e_{film} = \dfrac{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r,film}\cdot S}{C}$.

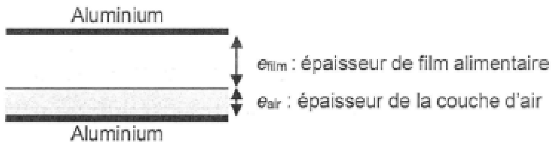
En convertissant la surface S en m² :

$$e_{film} = \frac{8{,}85\times10^{-12}F\cdot m^{-1}\times 2{,}3\times 21\times10^{-2}m\times 28\times10^{-2}m}{69{,}8\times10^{-9}F}$$ **= 1,7×10⁻⁵ m = 17 µm.**

Q7. z = $\left|\dfrac{17-7{,}6}{1{,}0}\right|$ = 9,4. L'écart entre l'épaisseur du film de référence et celle mesurée est plus de neuf fois supérieur à l'incertitude-type. Il y a un net désaccord entre la valeur de référence et la valeur mesurée.

$\dfrac{17-7.6}{1}$ 9.4

Q8. Cas limite n°1 : l'épaisseur de la couche d'air est nulle donc : e_{air} = 0 m.



$$C' = \frac{\varepsilon_0\cdot S}{\dfrac{e_{air}}{\varepsilon_{r,air}}+\dfrac{e_{film}}{\varepsilon_{r,film}}} = \frac{\varepsilon_0\cdot S}{0+\dfrac{e_{film}}{\varepsilon_{r,film}}} = \frac{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r,film}\cdot S}{e_{film}}.$$

On retrouve l'expression donnée dans l'énoncé.

Cas limite n°2 : l'épaisseur de la couche du film alimentaire est nulle donc : e_{film} = 0 m.

$$C' = \frac{\varepsilon_0\cdot S}{\dfrac{e_{air}}{\varepsilon_{r,air}}+\dfrac{e_{film}}{\varepsilon_{r,film}}} = \frac{\varepsilon_0\cdot S}{\dfrac{e_{air}}{\varepsilon_{r,air}}+0} = \frac{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r,air}\cdot S}{e_{air}}.$$

L'expression $C' = \dfrac{\varepsilon_0\cdot S}{\dfrac{e_{air}}{\varepsilon_{r,air}}+\dfrac{e_{film}}{\varepsilon_{r,film}}}$ est donc compatible avec celle précisée dans l'énoncé.

Q9. $$C' = \frac{\varepsilon_0\cdot S}{\dfrac{e_{air}}{\varepsilon_{r,air}}+\dfrac{e_{film}}{\varepsilon_{r,film}}} \Leftrightarrow \frac{e_{air}}{\varepsilon_{r,air}}+\frac{e_{film}}{\varepsilon_{r,film}} = \frac{\varepsilon_0\cdot S}{C'} \Leftrightarrow \frac{e_{air}}{\varepsilon_{r,air}} = \frac{\varepsilon_0\cdot S}{C'} - \frac{e_{film}}{\varepsilon_{r,film}}$$

$\boxed{e_{air} = \varepsilon_{r,air}\cdot\left(\dfrac{\varepsilon_0\cdot S}{C'} - \dfrac{e_{film}}{\varepsilon_{r,film}}\right)}$ Avec C ' = 69,8 nF , e_{film} = $e_{film,réf}$ = 7,6 µm il vient :

$$e_{air} = 1{,}0\times\left(\frac{8{,}85\times10^{-12}F\cdot m^{-1}\times 21\times10^{-2}m\times 28\times10^{-2}m}{69{,}8\times10^{-9}F} - \frac{7{,}6\times10^{-6}m}{2{,}3}\right)$$ **= 4,2×10⁻⁶ m = 4,2 µm.**

$\dfrac{8.85E\text{-}12*21E\text{-}2*28E\text{-}2}{69.8E\text{-}9} - \dfrac{7.6E\text{-}6}{2.3}$ 4.150953034E-6

L'épaisseur du film d'air est plus petite que l'épaisseur du film alimentaire, mais elle n'est pas négligeable.

2. Mesure de l'épaisseur du film alimentaire par pesée

Q10. On modélise le film alimentaire par un parallélépipède rectangle d'épaisseur e_{film} et de côtés ℓ = 29 cm et L = 30 m. Le volume du film alimentaire est donc : $V_{film} = e_{film} \cdot \ell \cdot L$.

La masse volumique du film alimentaire est donc : $\rho_{film} = \dfrac{m_{fil}}{V_{fil}} = \dfrac{m_{fil}}{e_{film} \cdot \ell \cdot L}$.

L'épaisseur du film est donc : $\boxed{e_{film} = \dfrac{m_{fil}}{\rho_{film} \cdot \ell \cdot L}}$

En convertissant la masse en kg :

$$e_{film} = \frac{70{,}56 \times 10^{-3}\,kg}{1{,}25 \times 10^{3}\,kg \cdot m^{-3} \times 29 \times 10^{-2}\,m \times 30\,m}$$ **= 6,5×10⁻⁶ m = 6,5 µm.**

$\dfrac{70.56E-3}{1.25E3*0.29*30}$

6.488275862E-6

Valeur voisine de l'épaisseur de référence 7,6 µm.

3. Mesure de l'épaisseur du film alimentaire par interférométrie

Q11. Pour des interférences constructives : $\delta = k \times \lambda$ avec k entier positif ou négatif.

Q12. $p = \dfrac{\delta}{\lambda} = \dfrac{\beta \times e_{film}}{\lambda} + \dfrac{1}{2}$

Si $\dfrac{\beta \times e_{film}}{\lambda}$ est un entier alors p est un demi-entier.

On se retrouve dans le cas où $\delta = p \times \lambda$ avec p est un demi-entier.

On observera des interférences destructives.

Q13. Les maximas d'intensité entourés correspondent aux longueurs d'ondes pour lesquelles les interférences sont constructives.

Exercice 02 – Traitement de surface d'une pièce de jeu d'échecs

1. Préparation du bain d'anodisation sulfurique

Q1. Précautions à prendre lors de la manipulation de l'acide sulfurique

L'acide sulfurique concentré est un produit chimique dangereux. Les précautions à prendre sont :

- Porter des équipements de protection individuelle (gants, lunettes de sécurité, blouse).
- Manipuler sous hotte aspirante pour éviter l'inhalation de vapeurs.
- Éviter tout contact avec la peau ou les yeux (risque de brûlures graves).
- En cas de contact, rincer abondamment à l'eau.
- Stocker loin des bases et des matières organiques.

Justification : le pictogramme de danger présent sur la bouteille (non reproduit ici mais généralement présent) indique un produit corrosif.

Q2. Masse d'acide sulfurique commercial à peser pour préparer 500 mL d'une solution à 180 g·L^{-1}

La concentration souhaitée est $C = 180\ \mathrm{g \cdot L^{-1}}$ en acide sulfurique pur.
Pour un volume $V = 0{,}500\ \mathrm{L}$, la masse d'acide pur nécessaire est :

$$m_{\text{pur}} = C \times V = 180 \times 0{,}500 = 90{,}0\ \mathrm{g}$$

L'acide commercial a un titre massique de 98 %, donc la masse d'acide commercial à prélever est :

$$m_{\text{commercial}} = \frac{m_{\text{pur}}}{\text{titre}} = \frac{90{,}0}{0{,}98} \approx 91{,}8\ \mathrm{g}$$

Réponse : il faut peser environ **91,8 g** d'acide sulfurique commercial.

2. Anodisation de la pièce de jeu d'échecs

Q3. Nature de la transformation lors d'une électrolyse

L'électrolyse est une **transformation forcée** (non spontanée) : elle nécessite l'apport d'énergie électrique fournie par un générateur pour se produire.

Q4. Demi-équation électronique de l'oxydation de l'aluminium en alumine

$$2\ \mathrm{Al(s)} + 3\ \mathrm{H_2O(l)} \rightarrow \mathrm{Al_2O_3(s)} + 6\ \mathrm{H^+(aq)} + 6\ \mathrm{e^-} \quad \text{.... } \mathbf{(1)}$$

Justification.du.rôle.d"anode : l'aluminium est oxydé en alumine. L'oxydation a lieu à l'anode, donc la pièce en aluminium est bien l'anode de l'électrolyse.

Q5. Demi-équation électronique de la réduction de l'eau

$$6\ \mathrm{H^+(aq)} + 6\ \mathrm{e^-} \rightarrow 3\ \mathrm{H_2(g)} \quad \text{.... } \mathbf{(2)}$$

Justification.du.dégagement.gazeux : il se forme du dihydrogène H_2 gazeux à la cathode (électrode en graphite), d'où l'observation de bulles.

Q6. Équation globale de l'électrolyse :

En additionnant les demi-équations (1) et (2) :

$$2\,Al(s) + 3H_2O(l) + \cancel{6H^+}(aq) + \cancel{6e^-} \longrightarrow Al_2O_3(s) + \cancel{6H^+}(aq) + \cancel{6e^-} + 3H_2(g)$$

Équation globale de l'électrolyse sera :

$$2\,Al(s) + 3\,H_2O(l) \rightarrow Al_2O_3(s) + 3\,H_2(g)$$

Q7. Schéma annoté (description textuelle)

Sur le schéma de l'électrolyse :

- **Sens des électrons** : de l'anode (pièce en Al) vers la cathode (graphite) dans les fils électriques.
- **Bornes du générateur** : anode reliée au **pôle +**, cathode au **pôle –**.
- **Sens de déplacement des ions** :
  - Les cations H^+ migrent vers la **cathode**.
  - Les anions SO_4^{2-} migrent vers l'**anode**.

Q8. Masse théorique d'alumine produite

Données :

- $I = 0{,}55\ \text{A}$
- $t = 40\ \text{min} = 2400\ \text{s}$
- $F = 96\,500\ \text{C} \cdot \text{mol}^{-1}$
- $M_{Al_2O_3} = 102\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

1. Calcul de la charge totale Q :

$$Q = I \times t = 0{,}55 \times 2400 = 1320\ \text{C}$$

2. Quantité d'électrons $n(e^-)$:

$$n(e^-) = \frac{Q}{F} = \frac{1320}{96\,500} \approx 0{,}01368\ \text{mol}$$

3. Quantité d'alumine formée :

D'après la demi-équation de l'oxydation : $2\,Al \rightarrow Al_2O_3 + 6\,e^-$

Donc $n(Al_2O_3) = \frac{n(e^-)}{6} \approx \frac{0{,}01368}{6} \approx 0{,}00228\ \text{mol}$

4. Masse théorique d'alumine :

$$m_{\text{théo}} = n(Al_2O_3) \times M_{Al_2O_3} = 0{,}00228 \times 102 \approx 0{,}233\ \text{g}$$

Réponse : $m_{\text{théo}} \approx 0{,}23\ \text{g}$

3. Coloration de la pièce de jeu d'échecs

Q9. Possibilité de coloration avec une épaisseur minimale de 15 µm

Données :

- $m_{\text{alumine}} = 0{,}23 \text{ g}$
- $\rho_{\text{alumine}} = 3{,}97 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$
- $S = 25 \text{ cm}^2$

1. Volume d'alumine :

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0{,}23}{3{,}97} \approx 0{,}0579 \text{ cm}^3$$

2. Épaisseur théorique :

$$e = \frac{V}{S} = \frac{0{,}0579}{25} \approx 0{,}00232 \text{ cm} = 23{,}2\ \mu\text{m}$$

3. Comparaison avec 15 µm :
$23{,}2\ \mu\text{m} > 15\ \mu\text{m}$ → la coloration est **possible.**

Q10. Rendement réel de l'anodisation

Donnée : épaisseur réelle $e_{\text{réelle}} = 19\ \mu\text{m} = 0{,}0019 \text{ cm}$

1. Volume réel :

$$V_{\text{réel}} = S \times e_{\text{réelle}} = 25 \times 0{,}0019 = 0{,}0475 \text{ cm}^3$$

2. Masse réelle :

$$m_{\text{réelle}} = \rho \times V_{\text{réel}} = 3{,}97 \times 0{,}0475 \approx 0{,}1886 \text{ g}$$

3. Rendement :

$$\eta = \frac{m_{\text{réelle}}}{m_{\text{théo}}} \times 100 = \frac{0{,}1886}{0{,}23} \times 100 \approx 82{,}0\%$$

Réponse : le rendement réel est d'environ **82 %.**